第 4 节 立体几何常见方法综合（★★☆）

强化训练

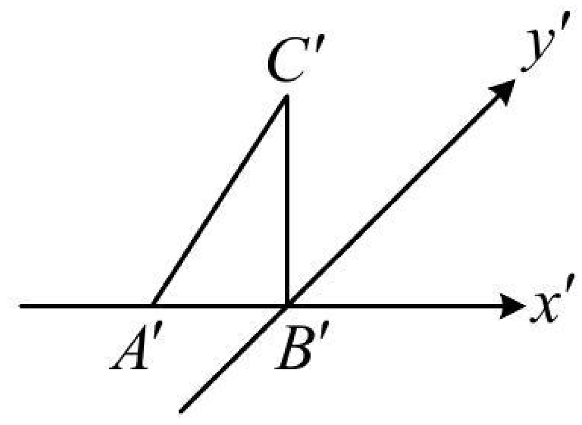
1．（★★）（多选）如图，$\Delta A'B'C'$ 表示水平放置的 ΔABC 根据斜二测画法得到的直观图，$A'B'$ 在 x' 轴上，$B'C'$ 与 x' 轴垂直，且 $B'C'=\sqrt{2}$，则下列说法正确的是（　　）

（A） ΔABC 的边 AB 上的高为 2

（B） ΔABC 的边 AB 上的高为 4

（C） $AC>BC$

（D） $AC<BC$



答案：BD

解析：要求 ΔABC 的边 AB 上的高，可先把直观图中与高对应的线段画出来，需注意原图中与 AB 垂直的线段在直观图中应与 $A'B'$ 成 45° 角，

如图 1，过 C' 作 y' 轴的平行线交 x' 轴于 D'，则原图中 $CD/\!/y$ 轴，如图 2，所以 CD 即为 AB 边上的高，

在图 1 中，$\Delta B'C'D'$ 为等腰直角三角形，且 $B'C'=\sqrt{2}$，所以 $C'D'=2$，故在图 2 中，$CD=4$，

所以 ΔABC 的边 AB 上的高为 4，故 A 项错误，B 项正确；由图 2 可知 $AC<BC$，故 C 项错误，D 项正确.

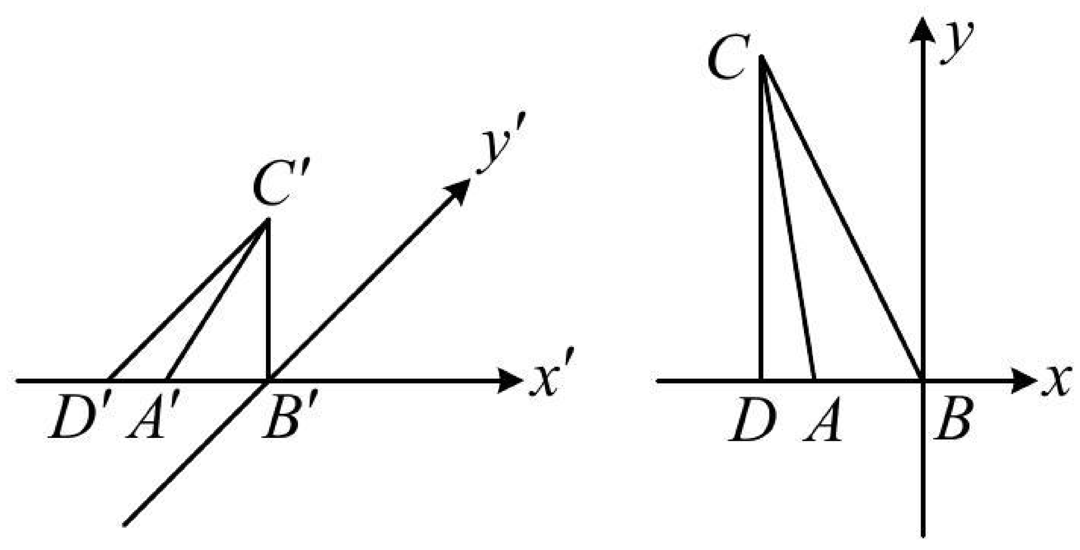
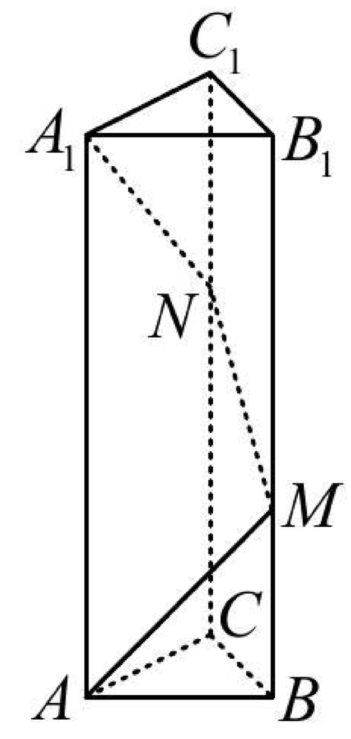


图1　　图2

2．（2022 • 安徽定远模拟 • ★★）如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=4$，$AB=1$，一只蚂蚁从点 A 出发，沿每个侧面爬到 A_1，路线为 $A\to M\to N\to A_1$，则蚂蚁爬行的最短路程是（　　）

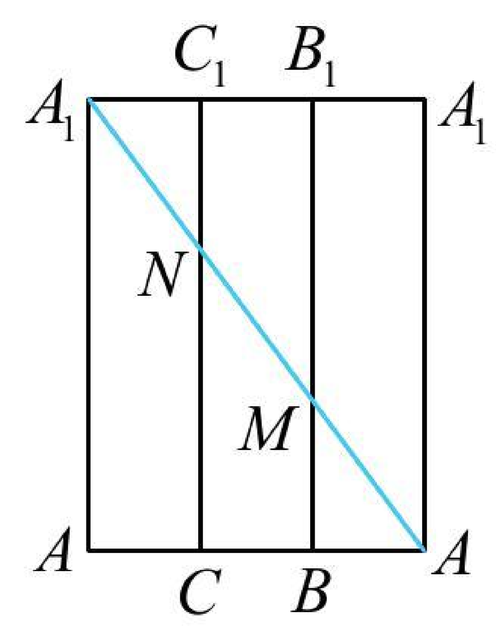
（A）4　　（B）5　　（C）6　　（D）$2\sqrt{5}+1$



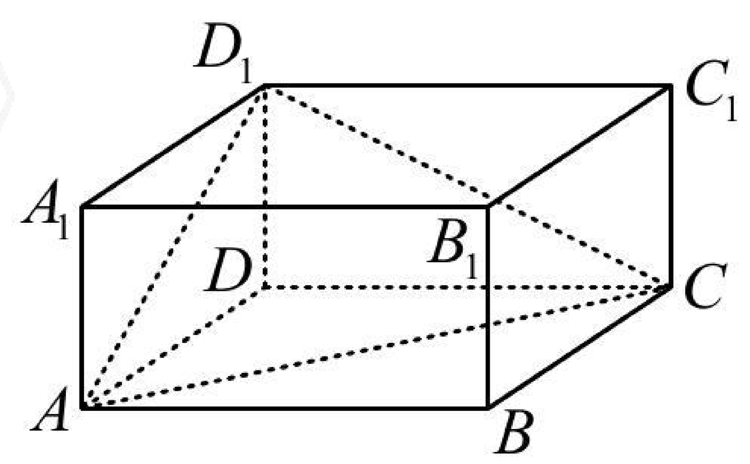
答案：B

解析：涉及最短路径问题，把空间图形展开到平面上来看，如图是正三棱柱沿 AA_1 的侧面展开图，

最短路径即为图中蓝色线段，其长度为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$.



3.（★★）如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面边长为 2，高为 1，则点 D 到平面 ACD_1 的距离是_____.



答案：$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

解析：如图，直接算距离需作高，较麻烦，但观察发现 V_{D_1-ACD} 和 $S_{\Delta ACD_1}$ 好求，故用等体积法算距离，

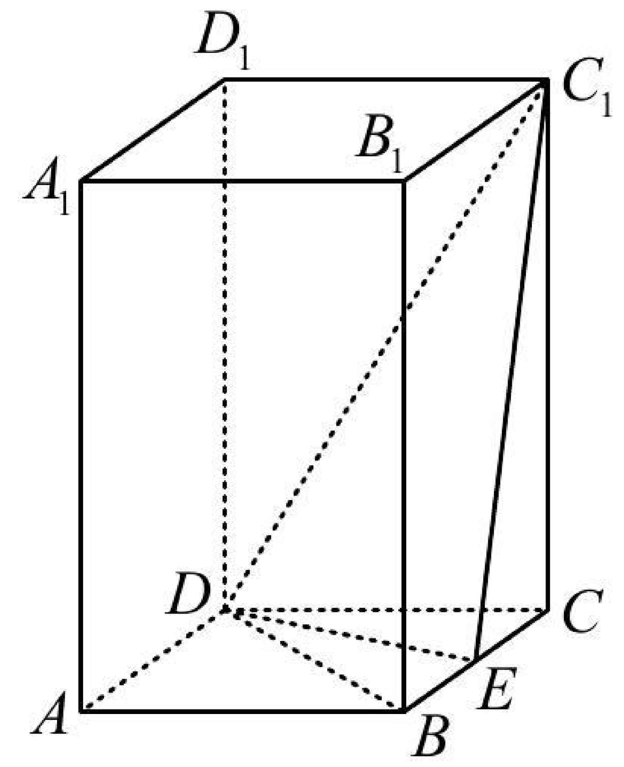
由题意，$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=2\sqrt{2}$，$AD_1=\sqrt{AD^2+DD_1^2}=\sqrt{5}$，$CD_1=\sqrt{CD^2+DD_1^2}=\sqrt{5}$，

所以等腰 ΔACD_1 的边 AC 上的高 $h=\sqrt{AD_1^2-(\frac{1}{2}AC)^2}=\sqrt{3}$，$S_{\Delta ACD_1}=\frac{1}{2}AC\cdot h=\sqrt{6}$，

设所求距离为 d，则 $V_{D-ACD_1}=\frac{1}{3}S_{\Delta ACD_1}\cdot d=\frac{\sqrt{6}}{3}d$，

又 $V_{D-ACD_1}=V_{D_1-ACD}=\frac{1}{3}S_{\Delta ACD}\cdot DD_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 1=\frac{2}{3}$，所以 $\frac{\sqrt{6}}{3}d=\frac{2}{3}$，解得：$d=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

4.（★★★）如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60^{\circ}$，E 是 BC 的中点，则点 C 到平面 C_1DE 的距离为_____.



答案：$\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$

解析：直接求距离需作垂线，较麻烦，注意到V_{C_1-CDE}和$S_{\Delta C_1DE}$好求，故用等体积法，

因为$ABCD$为菱形，所以$BC=CD$，又$\angle BAD=60^{\circ}$，所以$\angle BCD=60^{\circ}$，故ΔBCD为正三角形，

因为$AB=2$，所以$DE=\sqrt{3}$，又$C_1C=AA_1=4$，所以$C_1D=\sqrt{CD^2+CC_1^2}=2\sqrt{5}$，

因为$CE=1$，所以$C_1E=\sqrt{CE^2+CC_1^2}=\sqrt{17}$，所以$DE^2+C_1E^2=20=C_1D^2$，故$DE\perp EC_1$，

所以$S_{\Delta C_1DE}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{17}=\dfrac{\sqrt{51}}{2}$，设点$C$到平面$C_1DE$的距离为$d$，则$V_{C-C_1DE}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{51}}{2}d=\dfrac{\sqrt{51}}{6}d$，

另一方面，$V_{C-C_1DE}=V_{C_1-CDE}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta CDE}\cdot CC_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times4=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以$\dfrac{\sqrt{51}}{6}d=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，解得：$d=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$，故点$C$到平面$C_1DE$的距离为$\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

5.（★★★）在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别为DD_1，DB的中点，则三棱锥B_1-CEF的体积为_____.

答案：1

解析：如图，以B_1为顶点求体积，则高不好找，故尝试转换顶点，观察发现$CF\perp$面B_1EF，故选C为顶点，

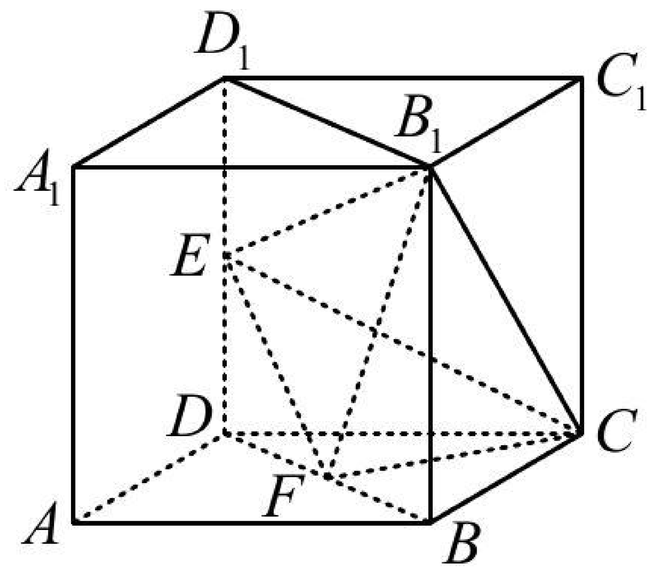
因为$CB=CD$，F为DB中点，所以$CF\perp DB$，又$BB_1\perp$平面$ABCD$，所以$CF\perp BB_1$，故$CF\perp$平面BB_1D_1D，

所以$V_{B_1-CEF}=V_{C-B_1EF}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta B_1EF}\cdot CF$ ①，

又$S_{\Delta B_1EF}=S_{BB_1D_1D}-S_{\Delta B_1D_1E}-S_{\Delta DEF}-S_{\Delta BB_1F}$

$=2\times2\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times1-\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

$CF=\dfrac{1}{2}BD=\sqrt{2}$，代入①得$V_{B_1-CEF}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=1$.



6．（2022 • 上海模拟 • ★★★）正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，E，F 分别为 BC，CC_1 的中点，则平面 AEF 截正方体所得的截面面积为_____.

答案：18

解析： A 和 EF 分别在左、右两个面内，且过 A 在左边面内易作 EF 的平行线，故作平行线即可扩大截面，如图 1，连接 AD_1，连接 D_1F，则 $AD_1 \parallel BC_1 \parallel EF$，所以平面 AEF 截正方体所得的截面为梯形 $AEFD_1$，

由正方体棱长为 4 可得 $EF=2\sqrt{2}$，$AD_1=4\sqrt{2}$，$AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=2\sqrt{5}$，$D_1F=\sqrt{D_1C_1^2+C_1F^2}=2\sqrt{5}$，

梯形 AD_1FE 如图 2，作 $FN\perp AD_1$ 于 N，$EM\perp AD_1$ 于 M，则 $MN=EF=2\sqrt{2}$，$AM=D_1N=\sqrt{2}$，

$FN=\sqrt{D_1F^2-D_1N^2}=3\sqrt{2}$，所以梯形 AD_1FE 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times 3\sqrt{2}=18$.

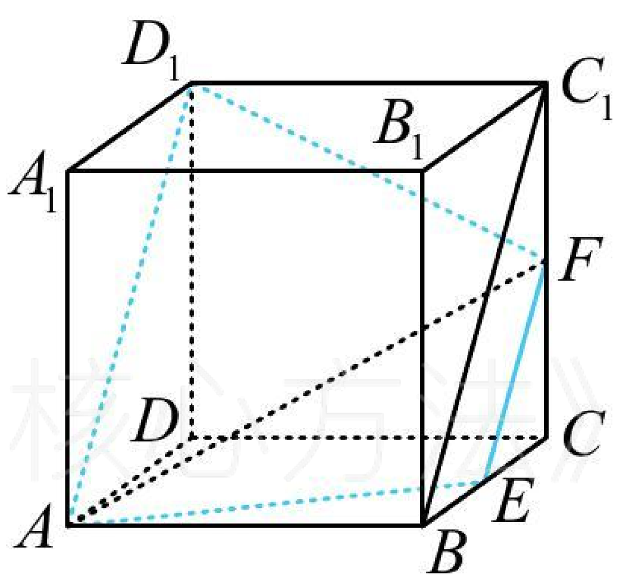


图1

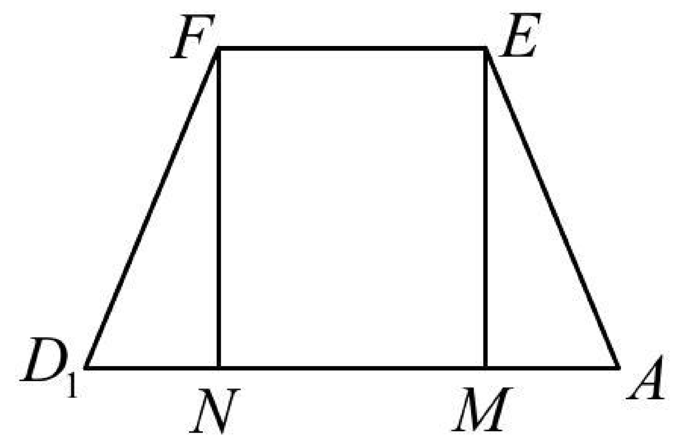


图2